



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

SOLUCIÓN CONTROL 1

Viernes 5 de Septiembre, 2003.

Problema 1

1. Para responder esta pregunta, nos definiremos un proceso de renovación alternante de forma de que el sistema este en ON solamente cuando hayan exactamente j personas en el sistema. De esta forma tendremos que

$$P[\text{Encontrar } j \text{ personas}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{On en } t] = \frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]}$$

Claramente definiremos un ciclo desde que se juntan C personas hasta que nuevamente se junta C personas.

Debería ser claro que

$$\frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]} = \begin{cases} \frac{1}{C} & \text{Si } 0 \leq j \leq (C-1) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Para calcular esta distribución condicionaremos sobre el número de personas que el cliente encuentra esperando al momento de su llegada. Sea X el tiempo de espera.

$$P[X \leq t] = \frac{1}{C} [F_{C-1}(t) + F_{C-2}(t) + \dots + F_1(t)]$$

Donde F_n es la distribución de una gamma(n, λ). Este resultado también puede ser expresado en función de la densidad del tiempo de espera, donde si tendríamos expresiones cerradas para la densidad del tiempo de espera. Esta sería:

$$f_X(t) = \frac{1}{C} \left[\sum_{k=1}^{C-1} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

3. Sea N el número de personas esperando una mesa en la recepción al momento que un cliente se retira. Buscamos $P[N = j]$. Para calcular esto condicionemos sobre el tiempo que demora el cliente en cuestión en cenar. A priori sabemos que esta distribución no tiene sentido para valores de $j > 6$. Sea X el tiempo que el cliente demora en cenar.

$$\begin{aligned}
P[N = j] &= \int_0^\infty P[N = j | X = t] dG(t) \\
&= \int_0^\infty \sum_{i=0}^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{C \cdot i + j}}{(C \cdot i + j)!} dG(t)
\end{aligned}$$

4. Primero analicemos cuales son las estimaciones de los clientes al llegar al restaurante.

Suponiendo que la disposición a esperar es una variable aleatoria no negativa tendremos que la persona que llega y ve que hay $C - 1$ personas esperando con probabilidad $P_C = \bar{F}(0) = 1$ esperara (en realidad espera 0) y provocara que todas las personas esperando (en total C incluyendose) obtengan una mesa.

La persona que llega y ve que hay $C - 2$ personas sabe que si decide esperar, esperara en promedio $\frac{1}{\lambda}$, lo que demora en llegar la C -ésima persona. Por esto la persona que llega y ve que hay esperando $C - 2$ personas con probabilidad $P_{C-1} = \bar{F}(\frac{1}{\lambda})$ esperará por una mesa.

De esta forma y razonando recursivamente vemos que la persona que llega en el lugar i -ésimo (es decir, ve que hay esperando $i - 1$ personas) esperara con probabilidad

$$P_i = \bar{F} \left(\sum_{k=i+1}^C \frac{1}{\lambda P_k} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, (C - 1)\}$$

De que nos sirve todo esto?. Vemos que la llegada de clientes a cenar, dispuestos a esperar, es un proceso de Poisson no homogéneo, y la forma en que se filtra depende del número de personas esperando, y además sabemos que la probabilidad de filtrado esta dada por P_i para el cliente que llega en el lugar i -ésimo.

Ahora podemos responder la pregunta utilizando el mismo procedimiento de la parte 1.

$$P[\text{Encontrar } j \text{ personas}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{On en } t] = \frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]}$$

Claramente definiremos un ciclo desde que se juntan C personas hasta que nuevamente se junta C personas.

Debería ser claro que

$$\frac{E[\text{Tiempo ON de un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{P_{j+1}}}{\sum_{i=1}^C \frac{1}{P_i}} & \text{Si } 0 \leq j \leq (C - 1) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

5. Para esto utilizamos la parte anterior y el hecho que los tiempos entre llegadas son exponenciales (claramente de distinta tasa).

$$E[X] = \sum_{j=0}^{C-2} \sum_{i=j+2}^C \frac{1}{\lambda \cdot P_i} \left[\frac{\frac{1}{P_{j+1}}}{\sum_{i=1}^C \frac{1}{P_i}} \right]$$

Problema 2

Parte 1

Vemos que

$$\frac{E[R(t)]}{t} = \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n - R_{N(t)+1}$$

$N(t)+1$ es un tiempo de parada, por lo tanto, aplicando Wald

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R](E[N(t)] + 1)}{t} - \frac{E[R_{N(t)+1}]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R](E[N(t)] + 1)}{t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R_{N(t)+1}]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R](E[N(t)])}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R]}{t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R_{N(t)+1}]}{t} \\ &= \frac{E[R]}{E[X]} \end{aligned}$$

En el último paso utilizamos el teorema elemental de renovación. Notamos que los otros límites son calculables, en particular notamos que $R_{N(t)+1}$ está acotado, por lo que el límite calculado es correcto. Adicionalmente hemos supuesto que $E[X] < \infty$ y que $E[R] < \infty$.

Parte 2

Dado que lo que queremos maximizar las ganancias en el largo plazo debemos maximizar las ganancias por unidad de tiempo (las ganancias en el largo plazo es un número que diverge).

Entonces, para realizar esto utilizamos un proceso de renovación con recompensa y utilizamos el resultado de la parte 1 de esta pregunta.

Entonces, definiendo un ciclo cada T unidades de tiempo (desde que parte un barco hasta parte el siguiente) tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[\text{Ganancia en un ciclo}]}{E[\text{Largo de un ciclo}]}$$

Claramente

$$E[\text{Largo de un ciclo}] = T$$

por otro lado

$$E[\text{Ganancia en un ciclo}] = r \cdot E[N] - K$$

Donde N es el número de personas que se suben a un barco.

Por otro lado condicional en que llegaron n personas a visitar el puerto, tendremos que la probabilidad de que una de esas personas se suba al barco dado que llego en el instante t (desde que se fue el barco anterior) es $e^{-\mu(T-t)}$. Pero nosotros conocemos la distribución condicional de la llegada de las personas (uniforme $[0, T]$), por lo tanto, independiente del instante de llegada, cada una de las n personas que visito el puerto se subio al barco con probabilidad

$$\begin{aligned} P &= \int_0^T e^{-\mu(T-t)} \frac{dt}{T} \\ &= \int_0^T e^{-\mu x} \frac{dx}{T} \\ &= \frac{1}{\mu T} [1 - e^{-\mu T}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la llegada al puerto de personas que se suben al barco es Poisson de tasa λP , y por lo tanto

$$E[N] = \lambda T \cdot \frac{1}{\mu T} [1 - e^{-\mu T}] = \frac{1}{\mu} \lambda [1 - e^{-\mu T}]$$

Concluimos que

$$R = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1}{\mu T} \lambda r [1 - e^{-\mu T}] - \frac{K}{T}$$

Para encontrar el T^* que maximiza las ganancias de largo plazo, derivamos e igualamos a 0 \Rightarrow

$$\frac{dR}{dT} = e^{-\mu T} \left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu} \right) + K - \frac{r\lambda}{\mu} = 0$$

Reordenando términos tendremos que

$$e^{-\mu T} \left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu} \right) = \frac{r\lambda}{\mu} - K$$

Dudas, consultas y comentarios a
dsaure@dii.uchile.cl